

Rotația Pământului și pendulul lui Foucault.

Neculai Rădulescu –astronom (România), Ștefan D. Tiron – prof. astronomie (R. Moldova)

Globul pământesc se rotește în jurul axei sale în 24 de ore și această mișcare face să se rotească aparent cerul întreg în jurul nostru. Iată primul adevăr demonstrat de Copernic și primul fapt pe care îl vom examina. Este important apoi să începem chiar studiul nostru astronomic cu cercetarea în general a poziției Pământului în spațiu și a ansamblului mișcărilor sale.

**Camille Flammarion. Astronomie populaire:
description generale du ciel** [0.1]

Rotația Pământului este un fenomen astronomic important pentru studiul mișcării corpurilor din Univers, nu este un fenomen singular, multe alte planete din Sistemul Solar cât și din Cosmos având astfel de rotații. Rotațiile pot fi unele ușor explicate în condițiile formării corpurilor cosmice, iar alte rotații care ies din contextul general, ne pot sugera alte modalități de formare sau chiar cataclisme cosmice petrecute în istoria Universului. Astfel se explică și faptul că UAI (Uniunea Astronomică Internațională) are o comisie specială destinată acestui fenomen „**COMISIA 19 - Rotația Pământului**”, România fiind printre membrii acestei comisii. Scopul acestei comisii (grupul de lucru T5) este tocmai să ia în considerație parametrii cei mai relevanți ai orientării Pământului – EOP. [0.2]

1.1 Rotația Pământului

Ca pământeni este ușor să credem că stăm pe loc. La urma urmei, nu simțim nicio mișcare în vecinătatea noastră. Doar atunci când privim cerul, putem să ne dăm seama că într-adevăr ne mișcăm. În Antichitate se credea că toate corpurile cerești, Soarele, Luna, planetele și stelele se mișcă în jurul Pământului, ceea ce ar explica răsăritul și apusul Soarelui, dar și mișcările Lunii sau ale planetelor. Viața oamenilor a fost dintotdeauna influențată de succesiunea zi-noapte. Această influență era chiar mai pronunțată înainte ca progresul tehnic să aducă lumina electrică.

Este posibil să fi trecut mult timp după ce gravitația a făcut posibilă nașterea Soarelui din materia amorfă care populează spațiul. Pe măsură ce s-a format, Soarele a dobândit rotația oferită de norul primitiv al materiei. O parte din materia care a dat naștere stelei a fost compactată în jurul Soarelui pentru a crea planetele, care au avut, de asemenea, partea lor din impulsul unghiular al norului originar. În acest fel, toate planetele (inclusiv Pământul) au propria lor mișcare de rotație în direcția vest-est, cu excepția lui Venus și Uranus, care se rotesc în direcția opusă. Unii cred că Uranus s-a ciocnit cu o altă planetă cu densitate similară și și-a schimbat axa și direcția de rotație. Pe Venus, existența mareelor gazoase ar putea explica de ce direcția de rotație s-a inversat încet în timp. Rotația se datorează proceselor de ciocnire (întâmplătoare, din cauză că distribuția prafului era neomogenă) prin care s-au format planetele și nu vreunui mecanism de autoreglare.

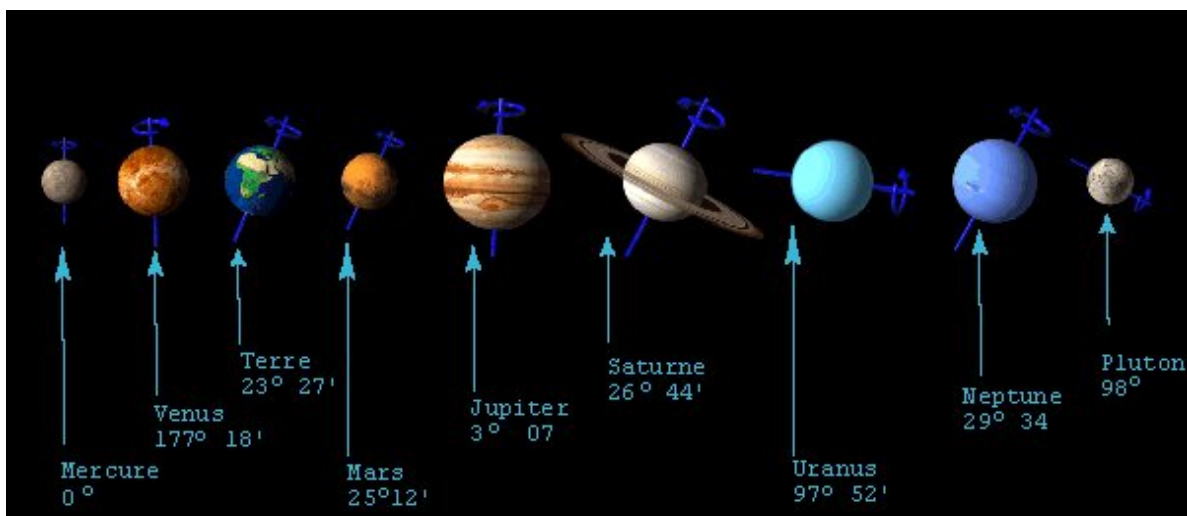


Fig. 1.1 Rotațiile planetelor (craq-astro.ca)

Însă, de ce răsare și apune Soarele în timpul unei zile? Cauza fenomenului rezidă în **mișcarea de rotație** a Pământului în jurul propriei axe. Prin urmare, o parte a zilei astronomice de 24 de ore care beneficiază de iluminare solară, se numește în mod obișnuit *zi*, iar partea din ziua astronomică fără iluminare de către razele solare, se numește *noapte*. Într-o zi astronomică, planeta noastră efectuează o rotație completă în jurul axei sale, în timp ce poziția față de Soare se modifică doar lent, numim această modificare lentă **mișcare de revoluție** a Pământului în jurul Soarelui.

În consecință, mereu o altă parte a globului pământesc este orientată către Soare. Datorită acestor mișcări, jumătate din glob este iluminat, iar cealaltă jumătate este întunecată.

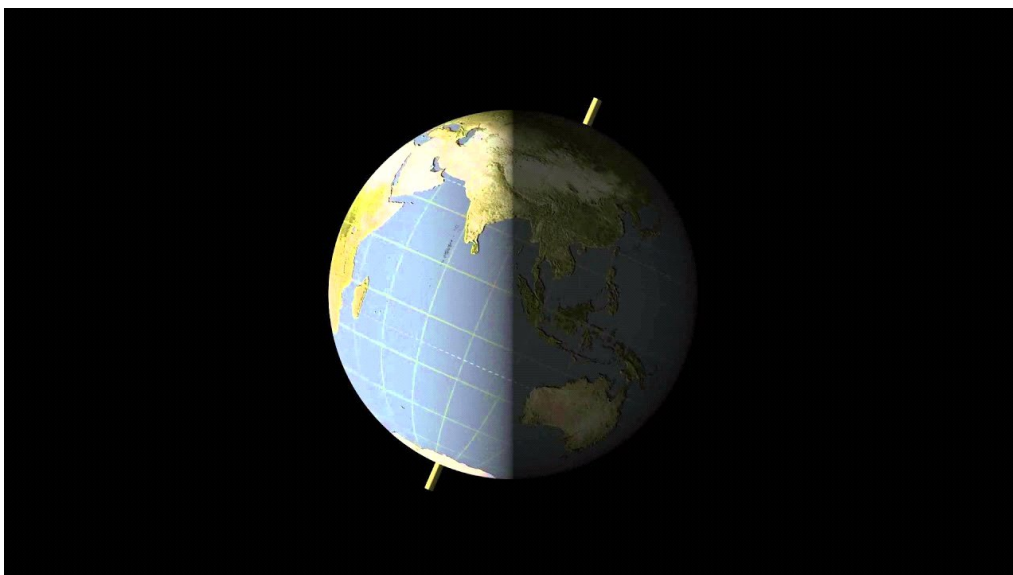


Fig. 1.2 Zi și Noapte

Nu trebuie să existe confuzie între cele două tipuri de mișcări: în timp ce **rotirea** înseamnă mișcarea în cerc în jurul unei axe, **revoluția** are loc atunci când un obiect se deplasează pe o traiectorie circulară sau eliptică în jurul altui obiect.

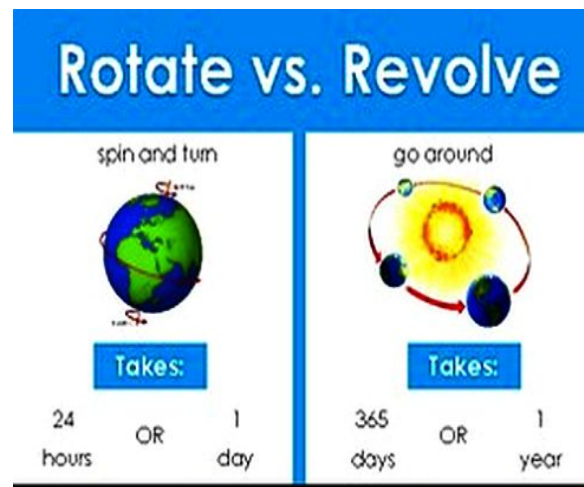


Fig. 1.3 Rotația și revoluția a Pământului (teacherspayteachers.com)

Mișcarea de rotație a fost explicată în 1543 de astronomul polonez Nicolaus Copernicus, în marea sa operă *Cartea revoluțiilor sferelor cerești*. El arată că Pământul are o rotație constantă de la Vest la Est. Dacă este observat dinspre Steaua Polară (*Alpha Ursae Minoris* sau *Polaris*), Pământul se rotește în sens trigonometric, adică în contrasens față de acele unui ceasornic, creând impresia că cerul se învâрте în jurul planetei.

Odată cu dezvoltarea teoriei heliocentrice a lui Copernic, s-a descoperit că Pământul se învâрте în jurul Soarelui, acesta din urmă fiind centrul sistemului solar. Ca urmare a acestei descoperiri, cele două mișcări terestre principale, și anume rotația și revoluția, au devenit cunoscute.

Pământul se învâрте în jurul propriei axe în exact **23 ore, 56 minute și 4 secunde** (23.9344696 ore) perioadă numită **zi siderală**. Atunci de ce zilele au 24 ore? De fapt, **24 de ore (ziua solară)** este durata pentru ca Soarele să se găsească în aceeași poziție pe cer a doua zi.

Acest decalaj de circa 4 minute este datorat mișcărilor combinate de rotire ale Pământului în jurul propriei axe și în același timp în jurul Soarelui, adică mișcarea de revoluție a Pământului.

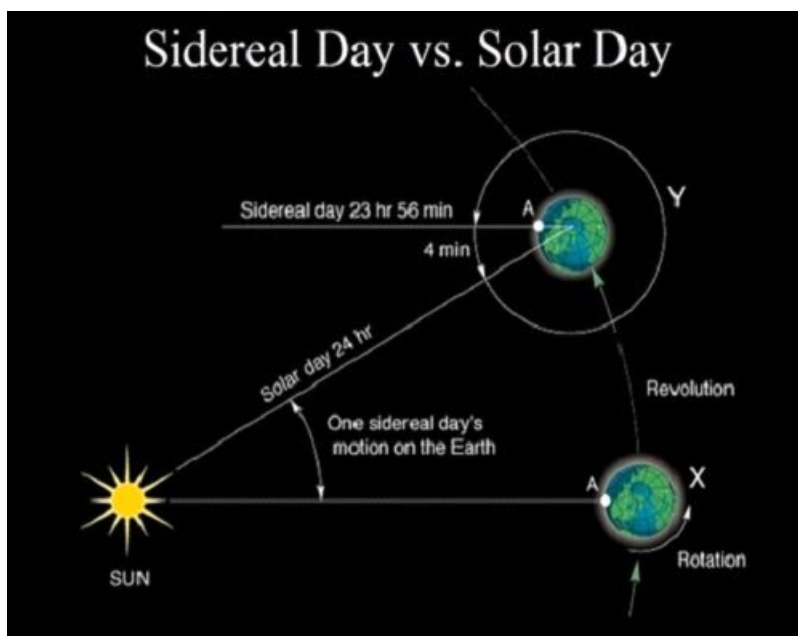


Fig. 1.4 Vizualizarea zilei siderale versus ziua solară. Credit: quora.com

La începutul unei zile Soarele răsare la orizontul estic, numim aceste clipe *zorii* unei zile. La mijlocul zilei Soarele luminează uniform de-a lungul întregului orizont, ca la sfârșitul zilei să se apropie de orizontul vestic.

Imediat după apusul Soarelui începe *crepusculul civil*, care durează până când Soarele coboară la 6 grade de arc sub orizont, după care începe *crepusculul maritim* ce durează până la momentul când Soarele atinge 12 grade sub orizont, și începe *crepusculul astronomic*. Crepusculul astronomic se termină în momentul când *Soarele atinge 18 grade sub orizont* și în acest moment începe noaptea. Așadar, **crepusculul astronomic** durează de la momentul când Soarele a coborât la 12 grade sub orizont până la 18 grade sub orizont.

Durata unei zile, respectiv timpul ce se scurge între răsăritul și apusul Soarelui, depinde de anotimp și de zona geografică (de latitudinea locului) unde se află observatorul. Durata zilei terestre este în creștere. Atunci când Pământul s-a format acum 4,6 miliarde de ani, ziua avea aproximativ șase ore. După circa 4 miliarde de ani viteza de rotație în jurul propriei axe a scăzut semnificativ, iar durata unei zile ajunsese la circa 21,9 ore. Astăzi, ziua medie este de 24 de ore, dar crește cu aproximativ 1,7 milisecunde în fiecare secol.

Mișcarea de rotație stabilește sistemul de fus orar, care constă într-o împărțire a zilei în ore pentru întreaga lume pornind de la meridianul zero (meridianul Greenwich). Fusele orare sunt fiecare dintre cele 24 de zone în care Pământul este împărțit de meridiane, fiecare fus orar având ora sa a zilei, cu diferențe de o oră între zone. Rotația Pământului permite stabilirea unui timp legal și ajustarea timpului pe glob, ajutând oamenii să se organizeze temporar, mai ales atunci când călătoresc, sau stabilesc relații personale și de afaceri cu alte țări.

Deși Pământul se mișcă în raport cu o axă imaginară a planetei, tocmai această axă a creat aranjamentul imaginar în planul cunoscutelor puncte cardinale: Nord, Sud, Est și Vest.

Circumferința sau ecuatorul Pământului este de aproximativ 40.070 km, potrivit Agenției spațiale NASA (SUA). Dacă se împarte ecuatorul Pământului la durata unei zile (24 de ore), avem viteza cu care ne rotim dacă ne aflăm la ecuator. Această viteză este aproximativ egală cu $V(eq) \approx 1.674,4 \text{ km/h}$.

Viteza la o anumită latitudine, de exemplu 45 de grade Nord sau Sud, se poate calcula utilizând cosinusul latitudinii. Pe teritoriul României pentru latitudinea de 45° ($\cos 45^\circ = 0,707$), putem aproxima viteza de rotație prin:

$$V(lat) = V(eq) \times \cos(45^\circ) \approx 1.670 \times 0,707 = 1.180 \text{ km/h}.$$

Această viteză scade pe măsură ce ne apropiem de polii Pământului.

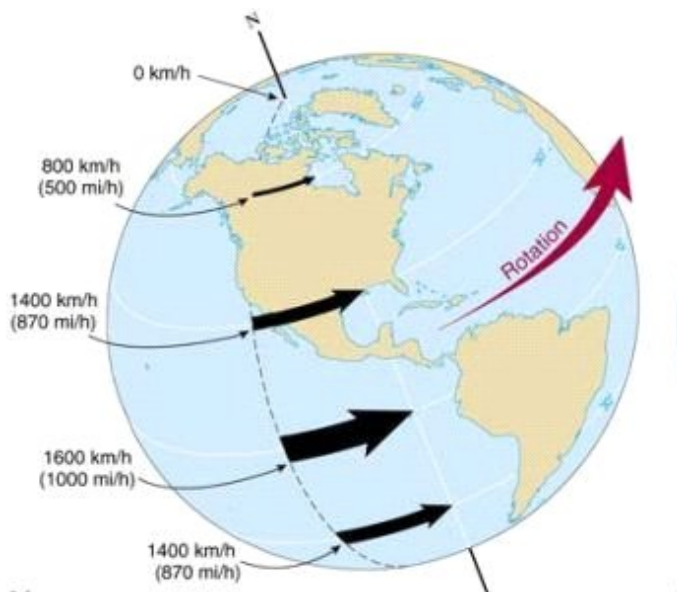


Fig. 1.5 Viteza de rotație a Pământului. wonderfulengineering.com

Agențiile spațiale profită de rotația Pământului. De exemplu, misiunile către Stația Spațială Internațională sunt lansate în apropiere de ecuator din peninsula Florida (SUA), deoarece astfel rachetele obțin un impuls suplimentar, care le ajută să se înscrie pe orbită în spațiul cosmic.

NASA arată că probabilitatea ca Pământul să se oprească din rotația în jurul axei sale este „practic zero” în următoarele câteva miliarde de ani. Cu toate acestea, dacă Pământul s-ar opri brusc, atunci s-ar produce un efect îngrozitor. Atmosfera ar continua să se deplaseze cu viteza inițială a rotației Pământului, acest lucru înseamnă că totul ar fi distrus de pe suprafața Pământului - oameni, clădiri, arbori și chiar stratul superior de rocă ce formează scoarța Pământului.

Dacă rotația Pământului ar înceta, atunci câmpul magnetic care protejează planeta noastră împotriva furtunilor solare ar dispărea, deoarece acesta este generat prin rotirea miezului de fier lichid din centrul planetei (efect cunoscut sub numele de „dinam”). De asemenea, aurorele polar

e și centurile de radiații Van Allen care înconjoară Pământul ar dispărea și ele.

Ce s-ar întâmpla dacă rotația Pământului ar încetini gradual? Acesta este cel mai probabil scenariu de-a lungul a miliarde de ani, arată NASA, deoarece Soarele și Luna exercită un efect gravitațional care provoacă micșorarea lentă a vitezei de rotație a Pământului. Luna încetinește rotația Pământului prin atracția pe care o exercită asupra acestuia și are drept consecință ridicarea nivelului apei oceanelor în zona în care atracția gravitațională este maximă. Rotirea Pământului face ca poziția zonei oceanice mai „umflate” să fie atrasă ușor înaintea axei Lună-Pământ, ceea ce creează o forță de răsucire care încetinește rotația Pământului, căci Luna „încearcă” să tragă înapoi, către axa Pământ-Lună, această masă de apă. Drept urmare, ziua terestră devine tot mai lungă. O consecință a acestui joc gravitațional dintre Pământ și Lună este îndepărtarea lentă a Lunii de Terra. Viteza de îndepărtare a Lunii față de Pământ este de cca 3,6 cm pe an. Această valoare este măsurată constant prin trimiterea unei raze laser către oglinzile lăsate de misiunile Apollo și Lunohod pe Lună.

Ca rezultat, din când în când, trebuie să mai adăugăm o secundă în plus la ceasurile noastre, tocmai pentru că rotația Pământului încetinește în fiecare clipă. Așadar, Pământul încetinește ușor în mișcarea sa în jurul propriei axe. Cu cât? **Cu 1,78 milisecunde la o sută de ani.** Poate că încetinirea nu este impresionantă, dar pentru cercetători este important să știe acest lucru cu precizie, fiind astfel capabili să calibreze sateliții de pe orbita terestră.

Cea mai mică viteză de rotație a Pământului ar fi de o rotație la fiecare 365 de zile. În acest caz vorbim de o rotație sincronă a Pământului în raport cu Soarele, ceea ce înseamnă că o emisferă a Pământului va fi întotdeauna îndreptată spre Soare, iar cealaltă emisferă va fi în permanent opusă Soarelui. Prin comparație, Luna, satelitul natural al Pământului, se află deja într-o rotație sincronă în raport cu Pământul (blocaj mareic), o emisferă a Lunii fiind întotdeauna vizibilă de pe Pământ, în timp ce cealaltă emisferă a Lunii este permanent opusă Pământului (față ascunsă a Lunii).

Rotația Pământului în jurul axei sale se manifestă prin numeroase fenomene la suprafața sa. De exemplu, rotația Pământului având loc **de la Vest spre Est**, alizeele (vânturi permanente în regiunile tropicale din cele două emisfere și care suflă spre ecuator) în emisfera nordică sunt vânturi de Nord-Est, iar în emisfera sudică, sunt vânturi de Sud-Est.

Apoi în emisfera de Nord cursurile de apă erodează malurile cu precădere pe partea dreapta, iar în emisfera de Sud malurile de pe partea stângă. Alt exemplu poate fi devierea spre Est a ciclonilor ce se deplasează de la Sud la Nord.

Mișcarea de rotație generează cunoscutul „efect Coriolis” [1.1], unul dintre cele mai interesante fenomene care au loc pe Pământ. Acest efect reprezintă forța la care sunt supuse toate fluidele de pe planetă, determinând masele de aer și oceanele să devieze în direcții previzibile. Datorită acestui efect, râurile, oceanele și vânturile derivă spre Est în emisfera nordică și spre Vest în emisfera sudică - un efect fundamental în domeniul meteorologiei, aeronauticii și aviației.

Sucesiunea de zile și nopți influențează oamenii, ei stabilindu-și perioadele de activitate și odihnă în funcție de zona în care se află, respectiv estică sau vestică. În mod similar, mișcarea

Pământului afectează modul de viață al animalelor și dezvoltarea plantelor.

Datorită succesiunii de zi și noapte, suprafața Pământului primește o cantitate mai mare de radiație solară în timpul zilei, care generează temperaturi mai ridicate în timpul zilei decât noaptea.

Prin efectuarea unei mișcări de rotație constante, Pământul generează o forță centrifugă, care este responsabilă pentru structura actuală a Pământului, făcându-l puțin aplatizat la poli și bombat în zona ecuatorială. Deformarea Pământului dă naștere la mici fluctuații ale valorii accelerației gravitaționale g în diferite locuri. De exemplu, valoarea g este mai mare la poli decât la ecuator.



Fig. 1.6 Rotirea stelelor în jurul Polarei. Peter Michaud (Gemini Observatory), AURA, NSF.

Astrofotografia Polarei realizată cu un timp de expunere de mai multe ore, ne arată grăitor și spectaculos, că Pământul se rotește în jurul propriei axe.

Însă proba care dovedește cel mai grăitor această rotație a Pământului de la Vest la Est, este experiența realizată cu **pendulul Foucault**, o dovadă spectaculoasă a rotației Pământului **fără a face observații astronomice**, care constituie subiectul articolului.

Înainte de a descrie teoretic comportamentul unui pendul Foucault, trebuie să reamintim că sunt multe domenii ale vieții, în care acesta apare ca mecanism oscilant încă din cele mai vechi timpuri. O aplicație a acestui mecanism este iubită în mod deosebit de copii, care chiar și în epoca modernă îl preferă în locurile de joacă, când pendularea în jurul unui ax fix le produce

plăcere (leagănul).

Deși acum avem ceasuri electronice, de multe ori chiar și la unele de acest tip, li se montează suplimentar pendul, pentru a semăna cu vechile ceasuri cu pendulă care ne măsurau timpul de muncă sau distracție. Amintim cu această ocazie că un alt francez Jean Picard (1620-1682) profesor de astronomie la College de France de la Paris, a introdus utilizarea ceasului cu pendulă în astronomia observațională pentru mărirea preciziei datelor [1.1].

Se vând pentru amuzamentul adulților înlănțuiri de mici pendule (*pendule cuplate / pendul leagăn / pendul cradle*) cu aceleași dimensiuni, prinse de aceeași tijă și care transmit mișcarea de la primul bob la ultimul, când primul bob este lansat. Explicația fizică pentru „*leagănul lui Newton*” există, iar ecuațiile matematice au o mare complexitate.

Cea mai ciudată aplicație a pendulului este așa numitul „*O Butafomeiro*” din Catedrala din Santiago de Compostela din Spania, care are agățată de un lanț de argint de 20 m o cădelniță de tămâiat de 53 kg, care la cea mai mică distanță de pământ de 0,5 m în timpul oscilării, împrăștie fum de tămâie și chiar scânteii. Are o amplitudine de 82° și o viteză de 68 km/h. Are o vechime de peste 700 de ani și printr-o bulă papală oricine ar fi încercat s-o fure, este excomunicat.

Nu trebuie uitat, că au fost mulți contemporani ai lui Leon Foucault, care nu înțelegeau cum funcționează mecanismul (la vremea primelor demonstrații publice, mulți spectatori deși potenți financiar, or fi avut prea puține cunoștințe de istoria științelor, de astronomie și mai ales de fizică) au contestat faptul că, pendulul poate fi o dovadă a rotației Pământului.

Pe lângă aceștia mai erau și cei răuvoitori care minimalizau demonstrațiile și nu este de mirare, fiindcă chiar în vremurile noastre mai sunt oameni care susțin că „Pământul este plat”[1.1].

1.2 Tipuri de pendul și formule matematice.

Înainte de a prezenta teoretic comportamentul unui pendul Foucault, să trecem în revistă istoria acestui experiment.

Pendulul gravitațional a fost studiat pentru prima dată de către savantul italian Galileo Galilei (1564-1642) observând oscilațiile unui candelabru din catedrala din Pisa. El *a stabilit primele trei proprietăți* ale pendulului și le-a aplicat la studierea mișcării corpurilor.

Primul studiu teoretic matematic al mișcării pendulului a fost realizat de Christian Huygens la 1673. Pendulul teoretic este format dintr-un corp de masă ***m*** și de dimensiuni mici (punct material) – numit de obicei **bob**, suspendat de un fir inextensibil, cu masă neglijabilă, de lungime ***l***. Dacă pendulul este scos din poziția sa de echilibru și este lăsat liber, el efectuează o mișcare oscilatorie într-un plan vertical, datorită forței de greutate.

Dispozitive experimentale bazate pe pendulul gravitațional:

- *Pendul balistic* dispozitiv pentru măsurarea vitezei unui proiectil, cum ar fi un glonț.
- *Pendul dublu* – două boburi în cascadă

- *Pendul inversat* – fir înlocuit de tijă rigidă, punct de oscilație sub bob, instabil fără control
- *Pendulul Huygens* (pendul cicloidal)
- *Pendulul Foucault*
- *Pendulul Kater* (pendul reversibil), conceput pentru a măsura valoarea g - accelerația gravitațională.
- *Pendulul Overbeck* (pendul în cruce)
- *Pendulul Schuler* este aplicat în unele sisteme de ghidare inerțiale pentru a menține o referință verticală internă corectă, chiar și în timpul accelerării rapide.
- *Pendul elastic*
- *Pendulul Kapitza* - suspensia vibrantă poate determina echilibrarea sa stabilă într-o poziție inversată , cu bobul deasupra punctului de suspensie
- *Pendulul Mach* - pendul obligat să oscileze într-un plan ce se poate înclina cu unghi variabil față de verticală
- *Pendulul cu roată inerțială*
- *Pendul conic* – se rotește într-un cerc
- *Pendulul Blackburn* – cu mișcare armonică simplă (harmonograf)
- *Pendul cuantic*
- *Pendulul Furuta* – un pendul inversat
- *Pendul cicloid* - punctul de suspensie urmărește o cicloidă
- *Pendulul nelinear* – cu două boburi prinse de o tijă, simetric față de locul de prindere
- *Pendulul de torsiune* – asemănător celui nelinear, nu oscilează împreună cu firul de prindere de sus, care rămâne nemișcat, elementul principal fiind fibra firului (des utilizat în aparate de măsură),
- *Pendulul electronic*
- *Pendulul microscopic*

Pentru multe din experimentele de mai sus se pot găsi explicații, mai mult sau mai puțin amănunțite, în paginile **Wikipedia** pe internet, iar explicații pe larg împreună cu formulele matematice în tratatul „*Pendulul . Un studiu de caz în Fizică*” [1.2].

Întrucât doar **pendulul Foucault** face obiectul experimentelor privind rotația Pământului, ne vom ocupa mai întâi de teoria fizico-matematică a pendulului, care se aplică tuturor categoriilor de pendul. Netezim astfel calea către prezentarea diverselor experimente realizate în mod special pe întinsul teritoriilor locuite de vorbitorii de limbă română.



1868: **Léon Foucault**, fizician francez, cel ce a demonstrat, gratie pendulului, mișcarea de rotație a pământului (n. 1819)

Deși a făcut studii de medicină, a fost permanent interesat de fizică. În 1850, a măsurat viteza luminii cu mare precizie. A inventat "pendulul lui Foucault" și l-a folosit într-un experiment pentru a demonstra că Pământul se rotește în jurul axei sale. A descoperit existența curenților turbionari (curenții Foucault) și a inventat o metodă simplă, dar extrem de precisă, pentru verificarea eventualelor defecțiuni ale oglinzilor telescoapelor.

Fig. 1. 7 Fizicianul LEON FOUCAULT

Scurt istoric. „În martie 1851 parizienii asistă la experiența cu pendulul lui Foucault instalat sub cupola Pantheonului și văd că pendulul își schimbă lent direcția de oscilație. Dacă spectatorii ar fi fost în afara Pământului, adică în spațiul cosmic, ei și-ar fi dat seama că pendulul oscilează doar, iar Pământul se rotește în jurul propriei axe.” (*Frédéric Borel Comprendre la physique : Éditions Eyrolles 2007*)

Dispozitivul experimental consta dintr-un pendul gravitațional care poate să oscileze în orice plan vertical.

Prima demonstrație din februarie 1851, a avut loc de fapt în pivnița casei mamei lui Leon Foucault, la care a participat și François Arago care i-a cerut să mute dispozitivul, în Camera Meridianului de la Observatorul din Paris. [1.3]

„Câteva săptămâni mai târziu, Leon Foucault a suspendat o sferă cu o masă de 28 kg, prevăzută cu un vârf ascuțit, de domul Pantheonului la capătul unui fir lung de 67 m. Pe podea era presărat un strat de nisip fin, pe care vârful pendulului trasează o rozetă și revine în locul de unde a pornit după 32 de ore. La latitudinea de 30° , o rotație completă durează 48 de ore.”

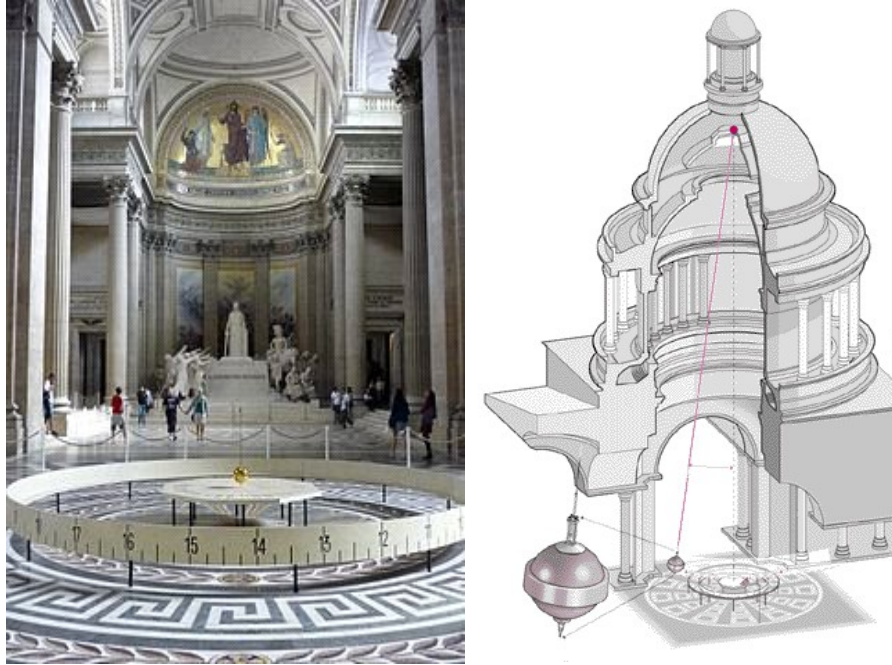
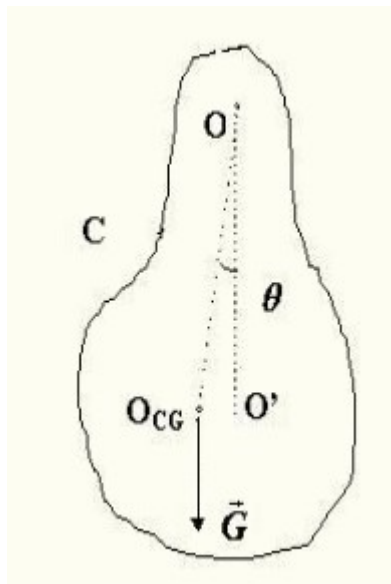


Fig. 1.8 *Pendul Foucault sub cupola Pantheonului din Paris.*

Revenind la aspectul teoretic al experimentului, începem cu **pendulul fizic** – forma cea mai simplă și reală a materializării pendulului, care ne va purta către **pendulul matematic** (care este o ficțiune, întrucât este doar o imagine nematerială pe care o construim mintal, să ne ajute să desprindem esența și comportamentul fenomenului, care stă la baza celor 17 tipuri de experimente enunțate anterior).

Se numește **pendul fizic (compus, eng. compund)** [1.3] un corp montat astfel încât să poată oscila într-un plan vertical, în jurul unui ax care nu trece prin centrul său de masă. Este vorba de un corp fizic cu o masă neuniform distribuită. În figura alăturată este arătat un astfel de pendul.



Corpul C având o formă oarecare, este suspendat în punctul O și poate oscila, cu frecări neglijabile, în jurul unei axe care trece prin acel punct. Fie O_{CG} punctul care marchează centrul de greutate al corpului.

În poziția de echilibru, centrul de greutate se găsește pe verticala ce trece prin punctul de susținere (în **Fig.1.9** - dreapta OO'). Dacă punctul O_{CG} se află pe verticală sub punctul O , atunci echilibrul este stabil. Acționând cu o forță exterioară, putem scoate corpul din poziția de echilibru prin rotirea lui cu un unghi $\theta = \theta(t)$ în plan vertical în jurul axului ce trece prin O . La înlăturarea acestei forțe, corpul rămâne sub acțiunea greutății G și a reacțiunii N a axului de rotație. Componenta Gt a forței de greutate produce un moment de rotire a corpului, care caută să-l aducă în poziția de echilibru.

Fig. 1.9 Pendulul fizic

Acest moment de revenire este:

$$M = -mgh \sin \theta \quad (1)$$

în care m este masa corpului, iar h este distanța de la centrul său de greutate la axa de rotație. În cazul deplasărilor mici $\sin \theta \approx \theta$ și pendulul se află în așa-numitul regim de amplitudini mici, când:

$$M \cong -mgh\theta \quad (2)$$

pendulul oscilând armonic, de o parte și de alta a poziției de echilibru. Perioada de oscilație a pendulului se află din ecuația diferențială de mișcare:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = M \quad (3)$$

în care I reprezintă momentul de inerție al corpului față de axul ce trece prin O .

Din relațiile (2) și (3) rezultă:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-mgh\theta}{I} \quad (4)$$

Coeficientul derivatei de ordinul zero a lui θ se notează cu ω_0^2 și reprezintă pătratul pulsației proprii a pendulului fizic. Se observă că ecuația (4) reprezintă, de fapt, ecuația diferențială a oscilatorului armonic:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (5)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (5) poate fi scrisă sub forma reală astfel:

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (6)$$

în care constantele θ_m și φ reprezintă amplitudinea și faza inițială a mișcării, ele putând fi determinate din condițiile inițiale ale mișcării.

Având în vedere notația pentru pulsație, putem determina perioada de oscilație a pendulului fizic, știind că $\omega = \frac{2\pi}{T}$ vom obține:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (7)$$

unde T este perioada (măsurată în secunde)

$\pi = 3,1415926...$

I = lungimea firului (exprimată în metri)

g = accelerația gravitațională, aproximativ $9,81 \text{ m/s}^2$ (depinde de locul de pe glob

unde se efectuează măsurarea și de altitudine)

Dacă am văzut mai sus care sunt parametrii și formulele unui pendul fizic, să vedem în continuare, care sunt formulele generalizatoare pentru un **pendul matematic** - cazul ideal,

valabile pentru orice fel de pendul.

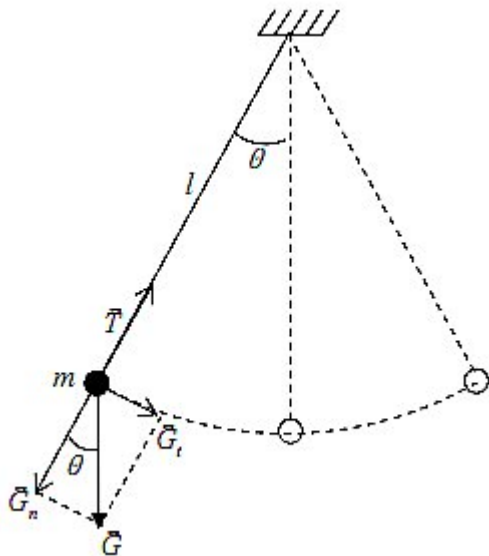


Fig.1.10 Pendul matematic

Un corp de masă m care se deplasează pe o sferă de rază l , suspendat într-un punct O de un fir de lungime l inextensibil, este o bună aproximație pentru **pendulul matematic** [1.4], dacă lungimea firului este mult mai mare decât dimensiunile corpului. Lăsat liber, corpul rămâne în echilibru în poziție verticală. Dacă îl deviem puțin din poziția de echilibru, asupra acelui corp acționează o forță care tinde, în lipsa frecării, să-l aducă din nou în poziția de echilibru, vezi **Fig. 1.10**. Echilibrul corpului este un echilibru stabil.

Forța de revenire care acționează asupra corpului este greutatea tangențială, orientată în sens opus creșterii unghiului θ , considerat sens pozitiv.

Din legea a doua a lui Newton, cu axele reprezentate prin săgeți în **Fig. 1.10**, avem:

$$mg \sin \theta = ma_t \quad \text{și} \quad T - mg \cos \theta = ma_n . \quad (8)$$

unde a_t este accelerația tangențială în direcția vectorului $\mathbf{G}_t = m\mathbf{a}_t$ e forța de revenire sau de rapel și a_n este accelerația normală în direcția vectorului $\mathbf{G}_n$ în lungul firului, adică normală la traiectoria arc de cerc a pendulului și compensată de tensiunea T din lungul firului (pentru unghiuri mici, $\theta \leq 5^\circ$, $\sin \theta \approx \theta$).

Observație: Un pendul Foucault execută oscilațiile în timp t în spațiul cu trei dimensiuni ($Oxyz$) și atunci pentru caracterizarea mărimilor fizice utilizate, folosim **vectori** (într-un sistem de trei coordonate) și **tensori** (dependența fiind de timpul cât oscilează). Spațiul – tensor de ordin 0 (*independent de timp*), viteza - tensor de ordin 1 și accelerația - tensor de ordin 2 (*notație cu două puncte*).

Accelerația tangențială a_t poate fi exprimată în funcție de accelerația unghiulară ε și raza cercului (lungimea firului):

$$a_t = \varepsilon l = \ddot{\theta} l \quad (9)$$

Ecuția la care ajungem este:

$$-mg \theta = m \ddot{\theta} l \quad (10)$$

și vom avea de rezolvat ecuația diferențială:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (11)$$

Se știe că soluția ecuației $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ este o mișcare oscilatorie de forma:

$$x = A \cos(\omega t + \phi),$$

unde A este amplitudinea oscilațiilor (amplitudinea unghiulară, în cazul nostru),

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ cu T este perioada mișcării oscilatorii, iar ϕ un factor de fază.

Prin analogie, putem spune că și mișcarea corpului nostru este tot o mișcare oscilatorie, iar perioada de mișcare poate fi calculată din:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (12)$$

Perioada de oscilație a pendulului este proporțională cu rădăcina pătrată a lungimii pendulului și invers proporțională cu rădăcina pătrată a accelerației gravitaționale.

În calculele noastre am neglijat masa firului (fir ideal), dimensiunile corpului (punct material) și forțele de frecare. Pendulul matematic este considerat pendulul ideal.

Se observă că, teoretic:

- perioada de oscilație nu depinde de masa și natura substanței punctului material (**legea substanței**);
 - pentru unghiuri mici (am folosit aproximația că $\theta \leq 5^\circ$) perioada de oscilație nu depinde de amplitudinea unghiulară a oscilațiilor (**legea izocronismului**);
 - pătratul perioadei de oscilație este direct proporțional cu lungimea pendulului.
- Altfel spus, $\frac{4\pi^2 l}{T^2}$ este constant în același loc de pe Pământ (**legea rapoartelor constante**).

În plus, formula $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

ne sugerează o metodă de măsurare a accelerației gravitaționale, prin măsurarea perioadei T a unui pendul de lungime l .

La amplitudini mai mari perioada se poate calcula folosind o serie infinită:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} + \frac{9}{64} \cdot \sin^4 \frac{\theta_{max}}{2} + \dots \right) \quad (13)$$

unde θ_{max} este amplitudinea unghiulară a pendulului.

Observăm că așa cum era și normal, formulele sunt similare atât pentru un corp tratat ca pendul fizic, cât și pentru cazul ideal al pendulului matematic și concluzionăm că formalizarea se aplică oricărui tip de pendul.

1.3 Particularitățile pendulului Foucault

Pendulul fizic și pendulul matematic (adică pendulul ideal) au fost prezentate ca funcționând în plan, deci într-un sistem de axe xOy (Ox orientată spre Est, deci tangentă la paralela geografică, și Oy spre Nord, deci tangentă la meridian). Pendulul lui Foucault funcționează în spațiul din exteriorul unei sfere, mai precis într-un loc geografic, și atunci prezentarea sa trebuie realizată în sistemul spațial care are trei dimensiuni, adică cu două axe în plan orizontal și o a treia axă pentru înălțime (suspendare pe verticala locului).

Dacă punem în ecuație această mișcare a planului de oscilație a pendulului Foucault în raport cu pulsația proprie, mai trebuie să ținem cont de faptul că rotația Pământului se efectuează în raport cu un reper galilean și e supusă forțelor de inerție datorate pulsației proprii a pendulului, θ .

„Cum prima experiența a lui Foucault din pivnița unei case din Paris cu fir lung de 2 m, precum și cea din sala meridian a Observatorului din Paris cu fir de lungime de 11 m, nu au fost convingătoare (ocazie care l-a împins să descopere **giroscopul**), a instalat în 1851 un nou pendul agățat în cupola Pantheonului din Paris (latitudine 48°) la înălțimea de 67 m., cu greutatea 28 kg și lăsat să oscileze de la 50 m de centru.” [1.4]

Ulterior când *forța Coriolis* a fost pusă în evidență, ecuațiile mișcării au devenit mai complexe.

Dacă ne aflăm la latitudinea ϕ , vectorul $\Omega \vec{k}$ (unde Ω este viteza unghiulară de rotație a Pământului – o rotație în 24 de ore, mult mai slabă decât pulsația proprie a pendulului ω ; iar $\vec{k}$ este vectorul unitar purtat de axa de rotație a Pământului)

va avea drept coordonate spațiale
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \theta \\ \Omega \sin \theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

Dacă notăm tensorial $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{h} \end{pmatrix}$ coordonatele vectorului viteză $\vec{v}$, accelerația Coriolis suferită de pendul - $2\Omega (\vec{k} \wedge \vec{v})$

are drept componente
$$\begin{pmatrix} 2\dot{y}\Omega \sin \theta - 2\dot{h}\Omega \cos \theta \\ -2\dot{x}\Omega \sin \theta \\ 2\dot{x}\Omega \cos \theta \end{pmatrix} \quad (15)$$

Neglijând influența deplasărilor verticale (h), ecuațiile mișcării în planul xOy vor deveni:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} = -\omega^2 x + 2\dot{y}\Omega \sin \theta \\ \ddot{y} = -\omega^2 y - 2\dot{x}\Omega \sin \theta \end{pmatrix} \quad (16)$$

unde e de notat că accelerația Coriolis $- \Omega \sin \theta$ nu depinde de lungimea firului; fiind independentă de ω .

Utilizând notația complexă $z = x + i y$,

sistemul de rezolvat se reduce la ecuația $\ddot{\mathbf{z}} + 2i\Omega \sin\theta \dot{\mathbf{z}} + \omega_0^2 \mathbf{z} = \mathbf{0}$. În caz că alegem o soluție clasică $\mathbf{r} = -i(\Omega \sin\theta \pm \omega_0)$ atunci soluția poate fi scrisă pentru a fi mai ușor de interpretat astfel:

$$\mathbf{z}(t) = e^{-i\Omega \sin\theta t} \left[\mathbf{z}_0 \left(\cos(\omega_0 t) + i \frac{\Omega \sin\theta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) + \frac{\dot{\mathbf{z}}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]. \quad (17)$$

Astfel, dacă $\dot{\mathbf{z}}_0 \neq \mathbf{0}$ și $\mathbf{z}_0$ **real**, traiectoria la sol a pendulului într-un reper rotitor după pulsația $\Omega \sin\theta$ este o elipsă parcursă într-o perioadă de $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

Dacă $\dot{\mathbf{z}}_0 \neq \mathbf{0}$ și $\mathbf{z}_0$ **pur imaginar**, atunci mișcarea eliptică e perturbată de o oscilație perpendiculară pe planul de oscilație și de aceeași frecvență ω_0 .

Pendulul lui Foucault instalat în Pantheon la Paris oscilează cu o pulsație proprie ω_0 extrem de apropiată de cea a pendulului simplu ω (primele 8 cifre sunt identice) pentru că Ω este foarte mic în comparație cu ω .

Perioada de oscilație $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \approx \mathbf{16,42 \text{ secunde}}$, dacă lungimea firului este de 67 metri ca la Pantheon. Pentru latitudinea nordică de $48^\circ 52'$ de la Paris [1.9], planul de oscilație face un tur complet în $T = \mathbf{31h 48'}$ la latitudinea θ , perioada dată de

$T = 2 \frac{\pi}{\Omega \sin\theta}$ (invers proporțională cu sinusul acestei latitudini) este mai lungă.

$\Omega \approx \frac{2\pi}{86164}$ este viteza de rotație a Pământului în jurul propriei axe, exprimată în radiani pe secundă și corespunde la o **zi siderală** care are 23 ore și 56 minute.

La Pantheon (1851) pentru latitudinea nordică de $48^\circ 52'$ cu pendul de 28 kg și lungime de 67 m planul de oscilație face într-o oră:

$$- \Omega \sin \frac{48 + \frac{52}{60} \times 2\pi}{360} \times \frac{360}{2\pi} \times 3600 = -11^0 19'$$

La Leningrad (1931), la catedrala Sf. Isaac planul de oscilație al pendulului de 54 kg și lungime de 93 m se învârte cu 13° pe oră.

Experiența cu pendulul Foucault se bazează pe proprietatea că la acest pendul se conservă planul său de oscilare, dacă asupra lui nu acționează altă forță decât greutatea. În cadrul experienței vom distinge trei cazuri de plasare geografică: **la poli, la ecuator și la o latitudine φ** .

Considerăm acum că pendulul oscilează la o latitudine φ , oscilațiile sale efectuându-se într-un plan vertical al unui loc dat. În virtutea rotației Pământului, observatorul va avea impresia că planul de oscilație al pendulului se învârte în jurul verticalei locului.

Viteza unghiulară a acestei rotații, $\omega\varphi$, este egală cu proiecția vectorului vitezei unghiulare de rotație a Pământului ω pe verticala în O a locului dat (**Fig. 1.11**).

Adică $\omega\varphi = \omega \sin\varphi = 15^\circ \sin\varphi$.

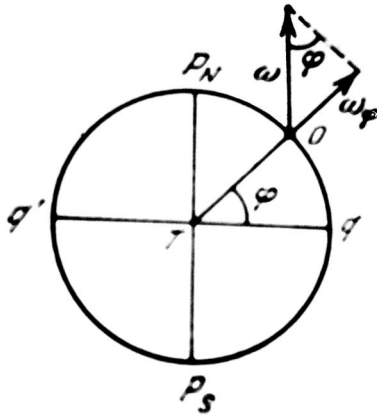


Fig 1.11. Dependența de latitudine.

Cum $\omega\varphi = \frac{2\pi}{T}$ iar $\omega = \frac{2\pi}{24} = 15^\circ$ vom avea $T = \frac{24}{\sin\varphi}$ perioada de rotație este invers proporțională cu sinusul latitudinii geografice unde oscilează pendulul conform [*theorie_rapide.pdf \(faidherbe.org\)*](http://theorie_rapide.pdf(faidherbe.org)) [1.4]

Astfel unghiul de rotație vizibil al planului de oscilație al pendulului în raport cu suprafața Pământului este proporțional cu sinusul latitudinii geografice. (la pol $\varphi = 90^\circ$, $\sin\varphi = 1$, la ecuator $\varphi = 0$ și $\sin\varphi = 0$).

Să presupunem că un astfel de pendul este plasat la **polul Nord** și că el oscilează la un moment dat în planul unui meridian dat l (**Fig.1.12**). Observatorul fixat pe suprafața pământească și care nu-i percepe rotația, va avea impresia că planul de oscilație al pendulului (planul A) se deplasează constant de la Est la Vest „urmând Soarele”, adică în sensul acelor ceasornicului. (**Fig.1.13**).

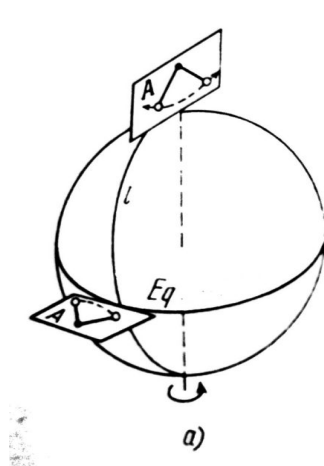


Fig 1.12

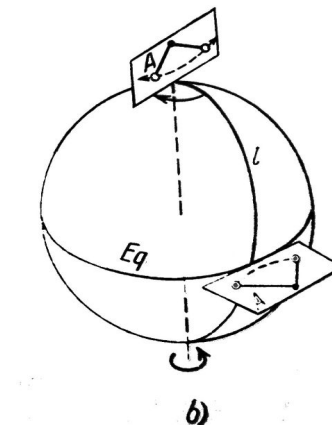


Fig 1.13

Însă planul oscilațiilor pendulului nu se poate schimba arbitrar și trebuie să recunoaștem

că Pământul este acela care se învâрте în jurul lui de la Vest la Est. Într-o zi siderală, planul oscilațiilor pendulului face o rotație completă în raport cu suprafața terestră cu viteza unghiulară $\theta = 15^0$ într-o oră siderală. La **polul Sud**, în 24 de ore siderale, pendulul va face de asemenea un tur complet, dar în sensul opus al acelor unui ceasornic (și aici $\varphi = 90^0$, $\sin\varphi = 1$).

Dacă plasăm pendulul la **ecuator** (unde $\varphi = 0$ și $\sin\varphi = 0$), în al cărui plan îl facem să oscileze, adică sub un unghi drept față de meridianul I ca în **Fig.1.12** și **Fig.1.13**, *observatorul nu va sesiza nici o deplasare a planului de oscilație în raport cu obiectele terestre, adică planul va părea fix, rămânând perpendicular pe meridian*. Rezultatul va fi același chiar dacă schimbăm planul de oscilație a pendulului și obișnuim să spunem că, la ecuator perioada de rotație a planului de oscilație a pendulului Foucault este infinit de mare.

După cum vedem experimentele destul de convingătoare, ne arată în același timp cât de sensibil este experimentul și cât de delicată trebuie să fie construirea și instalarea.

Un pendul Foucault necesită o configurare îngrijită, deoarece construcția imprecisă poate provoca o rotire suplimentară a bobului care maschează efectul terestru.

După cum a observat mai târziu laureatul premiului Nobel **Heike Kamerlingh Onnes**, care a dezvoltat o teorie mai completă a pendulului Foucault pentru teza sa de doctorat (1879), imperfecțiunea geometrică a sistemului sau elasticitatea firului suport poate provoca o interferență între două moduri de oscilație orizontale, care a determinat pendulul lui Onnes să treacă de la oscilația liniară la cea eliptică într-o oră.

Lansarea inițială a pendulului este, de asemenea, critică; modul tradițional de a face acest lucru este să se folosească o flacăra pentru a arde un fir care ține temporar bobul în poziția sa de pornire, evitând astfel mișcările laterale nedorite (a se vedea un detaliu al lansării la 50 de ani în 1902).

Putem distinge câteva din **perturbațiile generate de efecte parazite** care pot influența experimentele cu pendule Foucault:

- Amortizarea datorată frecării cu aerul, este proporțională cu secțiunea și volumul și invers proporțională cu greutatea bobului pendulului.
- Asimetria pendulului, nu trebuie să se rotească (o foarte slabă precesie intervine totuși și apare *efectul Magnus*).
- Modul de suspendare al pendulului
- Modul de lansare al pendulului, s-au încercat diverse metode, de la sfoara căreia i se dă foc, la *inelul Charron*. [1.4]

Pe pagina **Wikipedia** în limba franceză [1.5], dedicată pendulului Foucault pe lângă o dezvoltare amplă permisă de mijloacele interactive ale Internetului, se află și o listă cu țările care au instalat în diverse zone și clădiri astfel de experimente, care variază în dimensiuni, greutate, sisteme de suspendare și pornire, precum și mijloace auxiliare pentru punerea în evidență a devierii pendulului.

Referințe

- [0.1] Camille Flammarion. Astronomie populaire:description generale du ciel / Marpon KTK.Flammarion, Editeurs, 1880
- [0.2] J. Andersen (ed.), Reports on Astronomy, Vol. XXIVA, 32-47. COMMISSION 19: ROTATION OF THE EARTH , © 2000 IAU.
- [1.1] <http://www.encyclopédie-incomplete.com/?Le-Pendule-de-Foucault>
<https://planet-terre.ens-lyon.fr/ressource/force-de-coriolis.xml>
<https://nemox71.fr/coriolis.html>
- [1.2] GREGORY L. BAKER, JAMES A. BLACKBURN. The Pendulum. A Case Study in Physics © Oxford University Press 2005
- [1.3] https://math.fandom.com/ro/wiki/Pendul_gravitational
https://ro.wikipedia.org/wiki/Pendul_Foucault
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Foucault_pendulums
- [1.4] C. Manea, M. Garabet. Fizică. Manual clasa a 11-a. Ed. ALL 2015
David Moris Oscillations morin@physics.harvard.edu
https://www.faidherbe.org/~foucault/fichiers/pdf/theorie_rapide.pdf
[www.phys.ubbcluj.ro › ~dandr › pdf › Mec-LAB › 04-PENDULUL-MATEMATIC.pdf](http://www.phys.ubbcluj.ro/~dandr/pdf/Mec-LAB/04-PENDULUL-MATEMATIC.pdf)
- [1.5] https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_de_Foucault
<https://www.techno-science.net/definition/1829.html>
Cours de mécanique rationnelle : mouvements oscillatoires (coursgratuits.net)
<https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum>